Permutação com repetição

Raquel de Souza Francisco Bravo

e-mail: raquelbr.ic@gmail.com

20 de setembro de 2016

Conteúdo:

- Introdução
- Permutação com repetição
- Número de permutações com repetição

Permutações com repetição: Introdução

Exemplo 1:

Comprei 5 lapiseiras, 2 brancas, 1 azul, 1 preta e 1 verde, para dar de presente a meus amigos João, Rita, Luiza, Gabriel e Felipe. De quantas maneiras diferentes posso distribuí-las?

Permutações com repetição: Introdução

Exemplo 1:

Comprei 5 lapiseiras, 2 brancas, 1 azul, 1 preta e 1 verde, para dar de presente a meus amigos João, Rita, Luiza, Gabriel e Felipe. De quantas maneiras diferentes posso distribuí-las?

- Ilustração:

uma possibilidade	____	____	____	____	____
	João	Rita	Luiza	Gabriel	Felipe

Exemplo 1:

Comprei 5 lapiseiras, 2 brancas, 1 azul, 1 preta e 1 verde, para dar de presente a meus amigos João, Rita, Luiza, Gabriel e Felipe. De quantas maneiras diferentes posso distribuí-las?

- Ilustração:

Permutações com repetição: Introdução

Exemplo 1:

Comprei 5 lapiseiras, 2 brancas, 1 azul, 1 preta e 1 verde, para dar de presente a meus amigos João, Rita, Luiza, Gabriel e Felipe. De quantas maneiras diferentes posso distribuí-las?

- **Ilustração:**

- **Observações:**
  - A troca de lapiseiras entre João e Luiza modifica a distribuição.

Permutações com repetição: Introdução

Exemplo 1:

Comprei 5 lapiseiras, 2 brancas, 1 azul, 1 preta e 1 verde, para dar de presente a meus amigos João, Rita, Luiza, Gabriel e Felipe. De quantas maneiras diferentes posso distribuí-las?

- Ilustração:

- Observações:
  - A troca de lapiseiras entre João e Luiza modifica a distribuição.
  - A troca de lapiseiras entre João e Rita não modifica a distribuição.

Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

Raciocínio (baseado em permutações simples)

Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

Raciocínio (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Calculamos o número de distribuições considerando que marcamos cada lapiseira branca para diferenciá-las.

Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

Raciocínio (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Calculamos o número de distribuições considerando que marcamos cada lapiseira branca para diferenciá-las.

- Ilustração:

João Rita Luiza Gabriel Felipe

Permutações com repetição

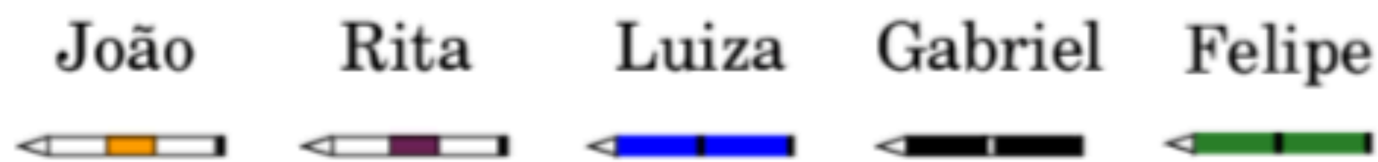
Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

Raciocínio (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Calculamos o número de distribuições considerando que marcamos cada lapiseira branca para diferenciá-las.

- Ilustração:



Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

Raciocínio (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Calculamos o número de distribuições considerando que marcamos cada lapiseira branca para diferenciá-las.

- Ilustração:

Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Resolução:

Raciocínio (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Calculamos o número de distribuições considerando que marcamos cada lapiseira branca para diferenciá-las.

- Ilustração:

Número de distribuições marcadas: $P_5 = 5!$

Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

- Ilustração:

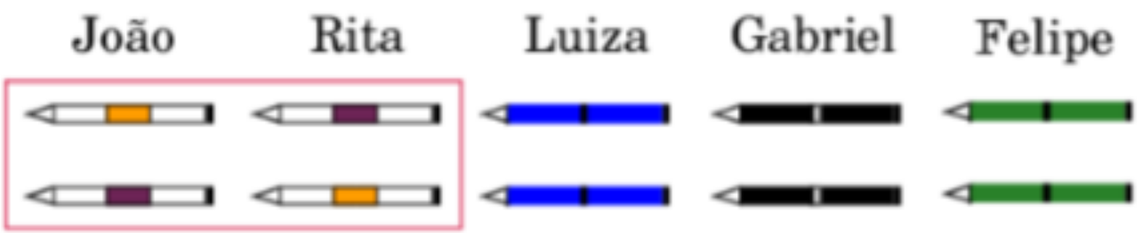
João Rita Luiza Gabriel Felipe

Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

- Ilustração:

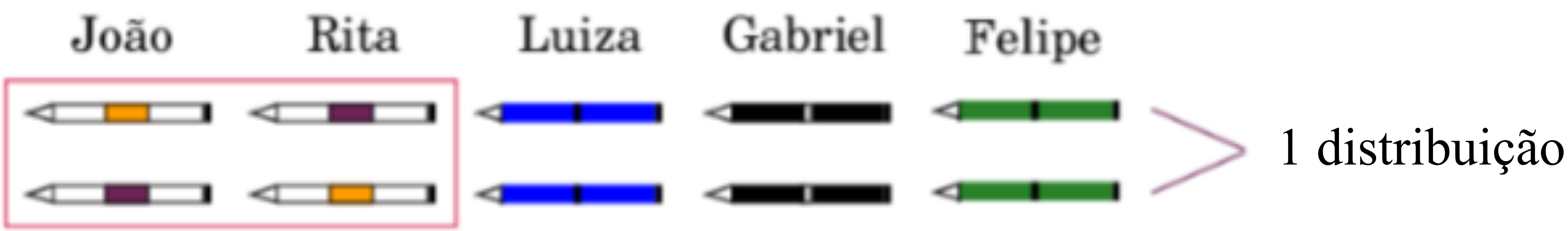


Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

- Ilustração:



Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

- Ilustração:

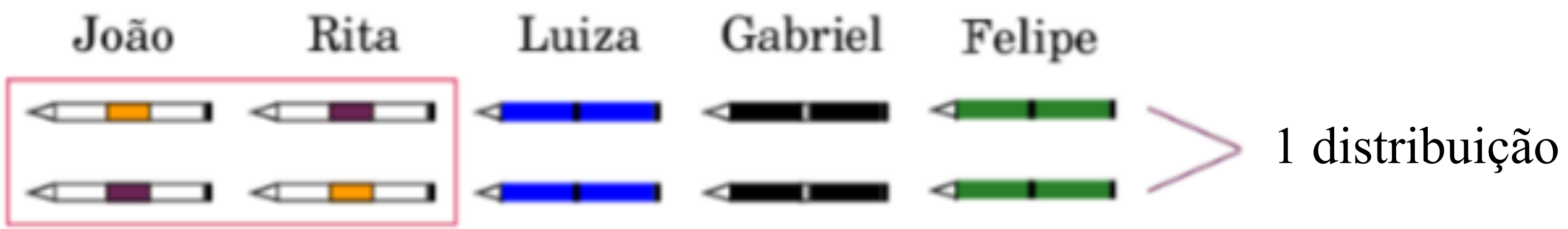
1 distribuição

Etapa 2: Reduzimos as distribuições repetidas

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

- Ilustração:



Etapa 2: Reduzimos as distribuições repetidas

$P_2 = 2 \xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 distribuição

Permutações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

- Ilustração:

1 distribuição

Etapa 2: Reduzimos as distribuições repetidas

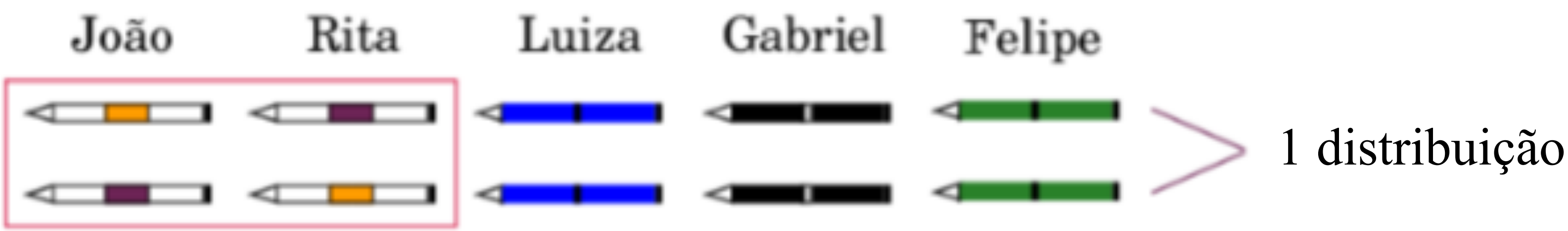
$$P_2 = 2 \xrightarrow{\text{correspondem}} 1 \text{ distribuição}$$

$$\text{(etapa 1) } P_5 \xrightarrow{\text{correspondem}} \frac{P_5}{P_2} = \frac{5!}{2} \text{ total de distribuições}$$

Exemplo 1 (continuação):

Atenção, estamos considerando distribuições iguais como sendo diferentes!

- Ilustração:



Etapa 2: Reduzimos as distribuições repetidas

$$P_2 = 2 \xrightarrow{\text{correspondem}} 1 \text{ distribuição}$$

$$\text{(etapa 1) } P_5 \xrightarrow{\text{correspondem}} \frac{P_5}{P_2} = \frac{5!}{2} \text{ total de distribuições}$$

Resposta: Posso distribuir as lapiseiras para meus amigos de $\frac{5!}{2} = 60$ modos diferentes.

Permutações com repetição

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 6 algarismos podem ser formados usando-se o dígito 1 três vezes, o dígito 3 duas vezes e o dígito 9 uma vez?

Permutações com repetição

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 6 algarismos podem ser formados usando-se o dígito 1 três vezes, o dígito 3 duas vezes e o dígito 9 uma vez?

- Ilustração:

133191 é uma possibilidade

Permutações com repetição

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 6 algarismos podem ser formados usando-se o dígito 1 três vezes, o dígito 3 duas vezes e o dígito 9 uma vez?

- Ilustração:

  133191 é uma possibilidade

Resolução:

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Permutações com repetição

Exemplo 2:

Quantos números distintos de 6 algarismos podem ser formados usando-se o dígito 1 três vezes, o dígito 3 duas vezes e o dígito 9 uma vez?

- Ilustração:

133191 é uma possibilidade

Resolução:

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Raciocínio 2 (baseado em combinações simples)

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Consideramos como sendo diferentes os números repetidos (os marcamos).

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Consideramos como sendo diferentes os números repetidos (os marcamos). Calculamos o número total de ordenamentos

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Consideramos como sendo diferentes os números repetidos (os marcamos). Calculamos o número total de ordenamentos

- Ilustração: 1 3 3 1 9 1

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Consideramos como sendo diferentes os números repetidos (os marcamos). Calculamos o número total de ordenamentos

- Ilustração:

1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Consideramos como sendo diferentes os números repetidos (os marcamos). Calculamos o número total de ordenamentos

- Ilustração:

  1 3 3 1 9 1

  1 3 3 1 9 1

Número de ordenamentos diferentes de algarismos marcados: $P_6 = 6!$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 1 (baseado em permutações simples)

Etapa 1: Consideramos como sendo diferentes os números repetidos (os marcamos). Calculamos o número total de ordenamentos

- Ilustração:

1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

Número de ordenamentos diferentes de algarismos marcados: $P_6 = 6!$

Atenção,

estamos considerando números iguais como sendo diferentes!

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração: 1 3 3 1 9 1
  1 3 3 1 9 1
  1 3 3 1 9 1
  1 3 3 1 9 1
  1 3 3 1 9 1
  1 3 3 1 9 1

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração:

1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 $<$ 1 3 3 1 9 1 / 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração:

1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração: 1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

São iguais a $\boxed{133191}$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração:

$$\underbrace{\begin{array}{c} 1\ 3\ 3\ 1\ 9\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1\ 9\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1\ 9\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1\ 9\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1\ 9\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1\ 9\ 1 \end{array}}_{P_3}$$

1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1

1 3 3 1 9 1

São iguais a $\boxed{133191}$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: <u>Reduzimos</u> os casos <u>iguais</u> considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração:

$$\underbrace{\begin{matrix}1\,3\,3\,1\,9\,1\\1\,3\,3\,1\,9\,1\\1\,3\,3\,1\,9\,1\\1\,3\,3\,1\,9\,1\\1\,3\,3\,1\,9\,1\\1\,3\,3\,1\,9\,1\end{matrix}}_{P_3} \qquad \underbrace{\begin{matrix}1\,3\,3\,1\,9\,1\\1\,3\,3\,1\,9\,1\end{matrix}}_{P_2} \qquad 1\,3\,3\,1\,9\,1$$

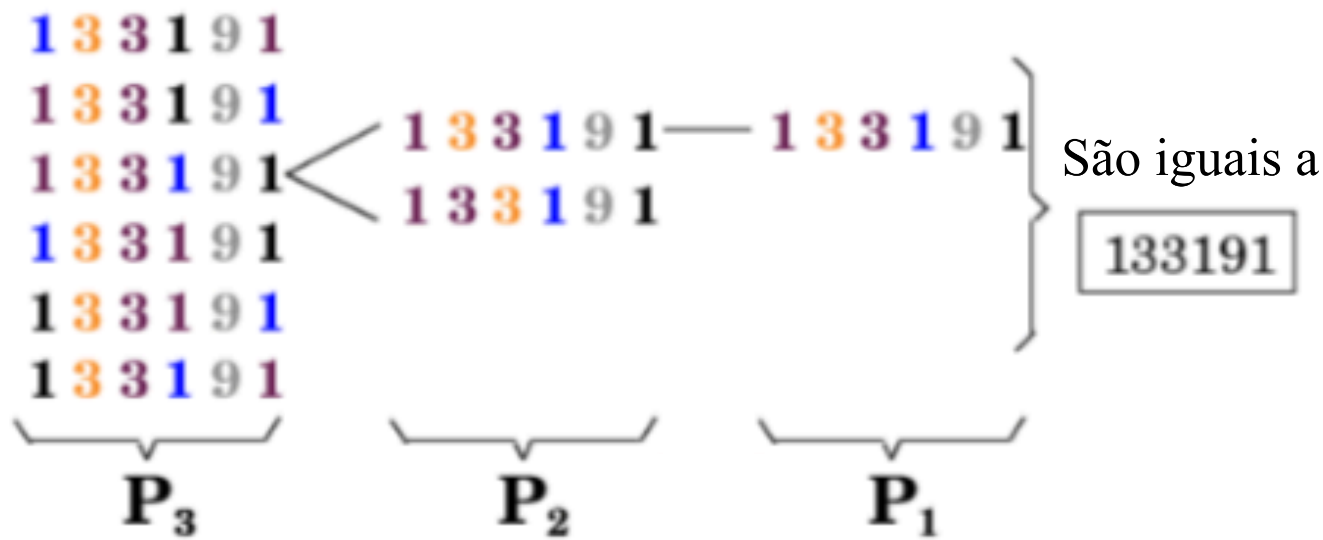
São iguais a $\boxed{133191}$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração:



Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração:

1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1

São iguais a $\boxed{133191}$

P_3 × P.M. P_2 × P.M. P_1

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração:

1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
      1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1

São iguais a $\boxed{133191}$

$P_3 \times$ P.M. $P_2 \times$ P.M. P_1

$P_1 \times P_2 \times P_3$ permutações simples $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 número

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração:

1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1

São iguais a $\boxed{133191}$

$\mathbf{P_3}$ × P.M. $\mathbf{P_2}$ × P.M. $\mathbf{P_1}$

$P_1 \times P_2 \times P_3$ permutações simples $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 número

(etapa 1) P_6 permutações simples $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ $\dfrac{P_6}{P_3 \times P_2 \times P_1} = \dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 1):

Etapa 2: Reduzimos os casos iguais considerados como diferentes na etapa 1.

- Ilustração:

1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1 — 1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1 (1 3 3 1 9 1)
1 3 3 1 9 1
1 3 3 1 9 1

São iguais a $\boxed{133191}$

$\underbrace{\quad}_{P_3}$ × P.M. $\underbrace{\quad}_{P_2}$ × P.M. $\underbrace{\quad}_{P_1}$

$P_1 \times P_2 \times P_3$ permutações simples $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ 1 número

(etapa 1) P_6 permutações simples $\xrightarrow{\text{correspondem}}$ $\dfrac{P_6}{P_3 \times P_2 \times P_1} = \dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}$

Total de números distintos

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 2 (baseado em combinações simples)

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 2 (baseado em combinações simples)

- Observação: dois números são diferentes quando as posições dos algarismos diferentes estão trocados (131139 é diferente de 311139).

Exemplo 2 (continuação):

Raciocínio 2 (baseado em combinações simples)

- Observação: dois números são diferentes quando as posições dos algarismos diferentes estão trocados (131139 é diferente de 311139).

Reformulação do problema:

De quantas maneiras diferentes podemos colocar três 1, dois 3 e um 9 em 6 posições?

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 1: Consideramos somente as possíveis posições dos três 1. Calculamos todos os modos de colocar os três 1 em 6 posições.

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 1: Consideramos somente as possíveis posições dos três 1. Calculamos todos os modos de colocar os três 1 em 6 posições.

- Ilustração:

$$\underline{1}\quad \underline{\ \ }\quad \underline{1}\quad \underline{1}\quad \underline{\ \ }\quad \underline{\ \ }$$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 1: Consideramos somente as possíveis posições dos três 1. Calculamos todos os modos de colocar os três 1 em 6 posições.

- Ilustração:

$\underline{1}$ __ $\underline{1}$ $\underline{1}$ __ __

$\underline{1}$ __ $\underline{1}$ __ $\underline{1}$ __

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 1: Consideramos somente as possíveis posições dos três 1. Calculamos todos os modos de colocar os três 1 em 6 posições.

- Ilustração:

1 __ 1 1 __ __

1 __ 1 __ 1 __

N_1: número de modos de colocar três 1 em 6 posições

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 1: Consideramos somente as possíveis posições dos três 1. Calculamos todos os modos de colocar os três 1 em 6 posições.

- Ilustração:

1 ___ 1 1 ___ ___

1 ___ 1 ___ 1 ___

N_1: número de modos de colocar três 1 em 6 posições

$N_1 = C(6, 3)$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 2: Fixada uma posição para os três 1, consideramos as possíveis posições dos dois 3 nos lugares restantes.

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 2: Fixada uma posição para os três 1, consideramos as possíveis posições dos dois 3 nos lugares restantes.

- Ilustração: 1 3 1 1 3 9

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 2: Fixada uma posição para os três 1, consideramos as possíveis posições dos dois 3 nos lugares restantes.

- Ilustração:

1	3	1	1	3	9
1	3	1	1	9	3

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 2: Fixada uma posição para os três 1, consideramos as possíveis posições dos dois 3 nos lugares restantes.

- Ilustração:

$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{9}$

$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{9}\ \underline{3}$

N_2: número de modos de colocar os dois 3 em 3 lugares

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 2: Fixada uma posição para os três 1, consideramos as possíveis posições dos dois 3 nos lugares restantes.

- Ilustração: 1 3 1 1 3 9

  1 3 1 1 9 3

N_2: número de modos de colocar os dois 3 em 3 lugares

$N_2 = C(3, 2)$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 2: Fixada uma posição para os três 1, consideramos as possíveis posições dos dois 3 nos lugares restantes.

- Ilustração:

1	3	1	1	3	9
1	3	1	1	9	3

N_2: número de modos de colocar os dois 3 em 3 lugares

$N_2 = C(3, 2)$

Etapa 3: Fixada uma posição para os três 1 e os dois 3 consideramos as possíveis posições para o 9.

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Etapa 2: Fixada uma posição para os três 1, consideramos as possíveis posições dos dois 3 nos lugares restantes.

- Ilustração:

$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{9}$

$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{9}\ \underline{3}$

N_2: número de modos de colocar os dois 3 em 3 lugares

$N_2 = C(3, 2)$

Etapa 3: Fixada uma posição para os três 1 e os dois 3 consideramos as possíveis posições para o 9.

N_3: número de modos de colocar o 9 em 1 lugar $= C(1, 1)$

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo

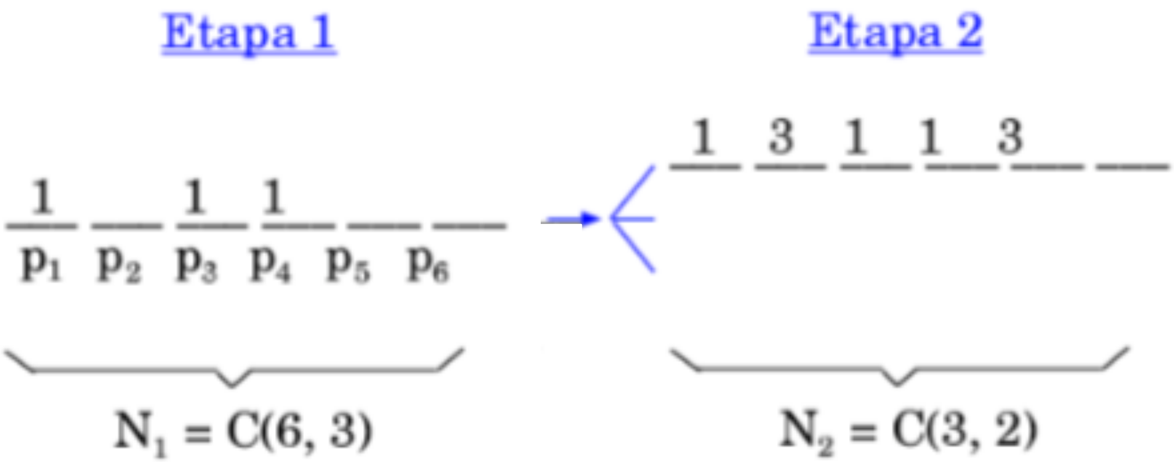
Etapa 1

$$\underbrace{\frac{1}{p_1}\ \frac{}{p_2}\ \frac{1}{p_3}\ \frac{1}{p_4}\ \frac{}{p_5}\ \frac{}{p_6}}_{N_1 = C(6,\,3)}$$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo



Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3
1 ___ 1 1 ___ ___ p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6	1 3 1 1 3 ___	1 3 1 1 3 9
$N_1 = C(6, 3)$	$N_2 = C(3, 2)$	$N_3 = C(1, 1)$

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo

Etapa 1		Etapa 2		Etapa 3
$\underset{p_1}{\underline{1}}\ \underset{p_2}{\underline{\quad}}\ \underset{p_3}{\underline{1}}\ \underset{p_4}{\underline{1}}\ \underset{p_5}{\underline{\quad}}\ \underset{p_6}{\underline{\quad}}$	$\rightarrow$	$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{\quad}$	$\rightarrow$	$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{9}$
$N_1 = C(6, 3)$	$\times$ P.M.	$N_2 = C(3, 2)$	$\times$ P.M.	$N_3 = C(1, 1)$

Permutações com repetição

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo

Etapa 1		Etapa 2		Etapa 3
$\underset{p_1}{\underline{1}}\ \underset{p_2}{\underline{\quad}}\ \underset{p_3}{\underline{1}}\ \underset{p_4}{\underline{1}}\ \underset{p_5}{\underline{\quad}}\ \underset{p_6}{\underline{\quad}}$	$\rightarrow$	$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$	$\rightarrow$	$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{9}$
$N_1 = C(6, 3)$	$\times$ P.M.	$N_2 = C(3, 2)$	$\times$ P.M.	$N_3 = C(1, 1)$

Resposta: O número total de possibilidades são

$$N_1 \text{ x } N_2 \text{ x } N_3$$

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo

Etapa 1

1		1	1		
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{N_1 = C(6,\,3)}$$

× P.M.

Etapa 2

1 3 1 1 3 ___ ___

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{N_2 = C(3,\,2)}$$

× P.M.

Etapa 3

1 3 1 1 3 9 ___

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{N_3 = C(1,\,1)}$$

Resposta: O número total de possibilidades são

$$N_1 \text{ x } N_2 \text{ x } N_3 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!\,0!} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!}$$

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo

Etapa 1		Etapa 2		Etapa 3
$\frac{1}{p_1}\ \frac{\ }{p_2}\ \frac{1}{p_3}\ \frac{1}{p_4}\ \frac{\ }{p_5}\ \frac{\ }{p_6}$	$\rightarrow$	$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{\ }\ \underline{\ }$	$\rightarrow$	$\underline{1}\ \underline{3}\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{3}\ \underline{9}\ \underline{\ }$
$N_1 = C(6, 3)$	$\times$ P.M.	$N_2 = C(3, 2)$	$\times$ P.M.	$N_3 = C(1, 1)$

Resposta: O número total de possibilidades são

$$N_1 \text{ x } N_2 \text{ x } N_3 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!\,0!} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{P_6}{P_3 P_2 P_1}$$

Exemplo 2 (continuação raciocínio 2):

Resumindo

Etapa 1		Etapa 2		Etapa 3
$\underset{p_1}{1}\ \underset{p_2}{\_}\ \underset{p_3}{1}\ \underset{p_4}{1}\ \underset{p_5}{\_}\ \underset{p_6}{\_}$	$\rightarrow$	1 3 1 1 3 _ _	$\rightarrow$	1 3 1 1 3 9
$N_1 = C(6, 3)$	× P.M.	$N_2 = C(3, 2)$	× P.M.	$N_3 = C(1, 1)$

Resposta: O número total de possibilidades são

$$N_1 \times N_2 \times N_3 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{1!}{1!\,0!} = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{P_6}{P_3 P_2 P_1}$$

Observação:

$3 + 2 + 1 = 6$

Permutações com repetição

- Características:
  - Os elementos considerados não são necessariamente diferentes.

Permutações com repetição

- Características:
  - Os elementos considerados não são necessariamente diferentes.
  - Os elementos iguais são indistinguíveis

Permutações com repetição

Características:

- Os elementos considerados não são necessariamente diferentes.
- Os elementos iguais são indistinguíveis
- Cada troca de posição (de ordem) dos elementos distinguíveis corresponde a uma possibilidade

Permutações com repetição

- Características:
  - Os elementos considerados não são necessariamente diferentes.
  - Os elementos iguais são indistinguíveis
  - Cada troca de posição (de ordem) dos elementos distinguíveis corresponde a uma possibilidade
  - Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo.

Permutações com repetição

- Características:
  - Os elementos considerados não são necessariamente diferentes.
  - Os elementos iguais são indistinguíveis
  - Cada troca de posição (de ordem) dos elementos distinguíveis corresponde a uma possibilidade
  - Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo.

Permutações com repetição

- Características:

  - Os elementos considerados não são necessariamente diferentes.
  - Os elementos iguais são indistinguíveis
  - Cada troca de posição (de ordem) dos elementos distinguíveis corresponde a uma possibilidade

    (não são consideradas as permutações dos elementos iguais).
  - Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo.

Permutação com repetição:

Definição

Entre n objetos dados tem-se n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2, ... , n_r elementos iguais a a_r, sendo $a_1, a_2, \ldots, a_r$ diferentes e $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Uma permutação com repetição destes n objetos é uma ordenação desses elementos onde não são consideradas as permutações entre os elementos iguais.

Permutações com repetição

Permutação com repetição:

Definição

Entre <u>n</u> objetos dados tem-se n_1 elementos <u>iguais</u> a a_1, n_2 elementos <u>iguais</u> a a_2, ... , n_r elementos <u>iguais</u> a a_r, sendo $a_1, a_2, \ldots, a_r$ <u>diferentes</u> e $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Uma permutação com repetição destes <u>n</u> objetos é uma ordenação desses elementos onde não são consideradas as permutações entre os elementos iguais.

Ilustração

Exemplo 2: $a_1 = 1$, $n_1 = 3$, $a_2 = 3$, $n_2 = 2$, $a_3 = 9$, $n_3 = 1$ ($r = 3$)

$n = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 2 + 1 = 6$,

Permutações com repetição

Permutação com repetição:

Definição

Entre n objetos dados tem-se n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2, ... , n_r elementos iguais a a_r, sendo $a_1, a_2, \ldots, a_r$ diferentes e $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$.

Uma permutação com repetição destes n objetos é uma ordenação desses elementos onde não são consideradas as permutações entre os elementos iguais.

Ilustração

Exemplo 2: $a_1 = 1$, $n_1 = 3$, $a_2 = 3$, $n_2 = 2$, $a_3 = 9$, $n_3 = 1$ (r = 3)

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 2 + 1 = 6,$$

permutações com repetição diferentes: 131139 e 311139

Permutações com repetição

Número de permutações com repetição:

Problema

Dados n objetos tais que n_1 elementos são iguais a a_1, n_2 elementos são iguais a a_2 , ... , n_r elementos são iguais a a_r e n = $n_1 + n_2 + \ldots + n_r$,
encontrar o número de permutações com repetição.

Permutações com repetição

Número de permutações com repetição:

Problema

Dados n objetos tais que n_1 elementos são iguais a a_1, n_2 elementos são iguais a a_2 , … , n_r elementos são iguais a a_r e $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$,
encontrar o número de permutações com repetição.

Propriedade

O número de permutações com repetição de n elementos sendo n_1 iguais a a_1, n_2 iguais a a_2, … , n_r iguais a a_r e $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$, é dado por: $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$

Permutações com repetição

Número de permutações com repetição:

- Ilustração

exemplo 2: $P_6^{3,\,2,\,1} = \dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}$

Número de permutações com repetição:

- Ilustração

exemplo 2: $$P_6^{3,\,2,\,1} = \frac{6!}{3!\;2!\;1!}$$

- Outra notação:

$$PR\,(n;\, n_1,\, \ldots\,,\, n_r)$$

Permutações com repetição

Número de permutações com repetição:

Ilustração

exemplo 2: $P_6^{3,\,2,\,1} = \dfrac{6!}{3!\;2!\;1!}$

Outra notação:

$$PR\,(n;\, n_1,\, \dots,\, n_r)$$

Observação: se $n = r$ e $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$

então $P_n^{n_1,\, \dots,\, n_r} = P_n^{1,\, \dots,\, 1} = P_n$

Permutações com repetição

Exemplo 3:

Um time de futebol jogou 15 partidas em um campeonato. Venceu 7 jogos, perdeu 5 e empatou 3. De quantos modos isto pode ter acontecido?

Permutações com repetição

Exemplo 3:

Um time de futebol jogou 15 partidas em um campeonato. Venceu 7 jogos, perdeu 5 e empatou 3. De quantos modos isto pode ter acontecido?

Resolução: $n=15$, $a_1 = \text{jogo vencido}$, $n_1 = 7$

$a_2 = \text{jogo perdido}$, $n_2 = 5$

$a_3 = \text{jogo empatado}$, $n_3 = 3$

Permutações com repetição

Exemplo 3:

Um time de futebol jogou 15 partidas em um campeonato. Venceu 7 jogos, perdeu 5 e empatou 3. De quantos modos isto pode ter acontecido?

Resolução: $n=15$, a_1 = jogo vencido, $n_1 = 7$

a_2 = jogo perdido, $n_2 = 5$

a_3 = jogo empatado, $n_3 = 3$

N: total das possíveis sequências de jogos vencidos, perdidos e empatados.

Permutações com repetição

Exemplo 3:

Um time de futebol jogou 15 partidas em um campeonato. Venceu 7 jogos, perdeu 5 e empatou 3. De quantos modos isto pode ter acontecido?

Resolução: $n=15$, a_1 = jogo vencido, $n_1 = 7$

a_2 = jogo perdido, $n_2 = 5$

a_3 = jogo empatado, $n_3 = 3$

N: total das possíveis sequências de jogos vencidos, perdidos e empatados.

$$N = P_{15}^{7,5,3} = \frac{15!}{7!\,5!\,3!} = 360360$$

Permutações com repetição

Exemplo 3:

Um time de futebol jogou 15 partidas em um campeonato. Venceu 7 jogos, perdeu 5 e empatou 3. De quantos modos isto pode ter acontecido?

Resolução: $n=15$, a_1 = jogo vencido, $n_1 = 7$

a_2 = jogo perdido, $n_2 = 5$

a_3 = jogo empatado, $n_3 = 3$

N: total das possíveis sequências de jogos vencidos, perdidos e empatados.

$$N = P_{15}^{7,\,5,\,3} = \frac{15!}{7!\,5!\,3!} = 360360$$

Resposta: O número de modos em que o time venceu, perdeu e empatou é $N = 360360$

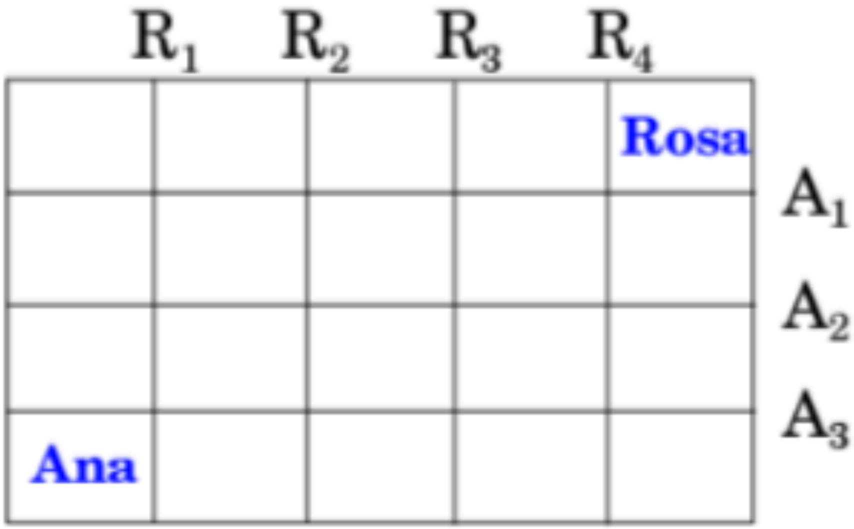
Permutações com repetição

Exemplo 4:

Ana e Rosa moram em vértices opostos de um retângulo. Ana precisa atravessar 3 avenidas e 4 ruas para chegar à casa de Rosa. Quantos caminhos diferentes unem as casas de Ana e de Rosa?

Exemplo 4:

Ana e Rosa moram em vértices opostos de um retângulo. Ana precisa atravessar 3 avenidas e 4 ruas para chegar à casa de Rosa. Quantos caminhos diferentes unem as casas de Ana e de Rosa?



Permutações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

- Observação:

Cada caminho, a partir da casa de Ana até a de Rosa, pode ser representado por uma sequência de 0 e de 1 com o seguinte significado:

Permutações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

- Observação:

Cada caminho, a partir da casa de Ana até a de Rosa, pode ser representado por uma sequência de 0 e de 1 com o seguinte significado:

0 : atravessa 1 rua (R_1, R_2, R_3 ou R_4)

Permutações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

- Observação:

Cada caminho, a partir da casa de Ana até a de Rosa, pode ser representado por uma sequência de 0 e de 1 com o seguinte significado:

0 : atravessa 1 rua (R_1, R_2, R_3 ou R_4)

1 : atravessa 1 avenida (A_1, A_2 ou A_3)

Exemplo 4 (continuação):

- Observação:

Cada caminho, a partir da casa de Ana até a de Rosa, pode ser representado por uma sequência de 0 e de 1 com o seguinte significado:

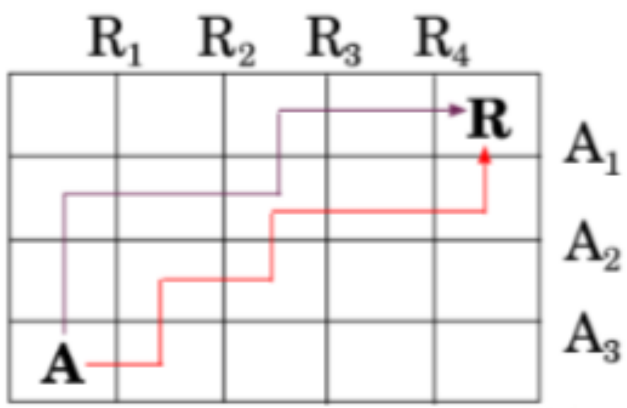
0 : atravessa 1 rua (R_1, R_2, R_3 ou R_4)

1 : atravessa 1 avenida (A_1, A_2 ou A_3)

- Ilustração:

0 1 0 1 0 0 1

1 1 0 0 1 0 0



Permutações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

Reformulação do problema:

Quantas sequências diferentes podem ser formados com quatro 0 e três 1 ?

Permutações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

Reformulação do problema:

Quantas sequências diferentes podem ser formados com quatro 0 e três 1 ?

Resolução:

Cada sequência corresponde a uma permutação com repetição.

Permutações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

Reformulação do problema:

Quantas sequências diferentes podem ser formados com quatro 0 e três 1 ?

Resolução:

Cada sequência corresponde a uma permutação com repetição.

$$n_1 = 4 \ (a_1 = 0)\,, \ n_2 = 3 \ (a_2 = 1)\,, \ n = 7$$

Exemplo 4 (continuação):

Reformulação do problema:

Quantas sequências diferentes podem ser formados com quatro 0 e três 1 ?

Resolução:

Cada sequência corresponde a uma permutação com repetição.

$$n_1 = 4 \ (a_1 = 0),\ n_2 = 3 \ (a_2 = 1),\ n = 7$$

Resposta (problema reformulado):

O número de sequências diferentes é $P_7^{4,3} = \dfrac{7!}{4!3!} = 35$

Permutações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

Reformulação do problema:

Quantas sequências diferentes podem ser formados com quatro 0 e três 1 ?

Resolução:

Cada sequência corresponde a uma permutação com repetição.

$$n_1 = 4 \ \ (a_1 = 0)\ , \ \ n_2 = 3 \ \ (a_2 = 1)\ , \ \ n = 7$$

Resposta (problema reformulado):

O número de sequências diferentes é $P_7^{4,3} = \dfrac{7!}{4!3!} = 35$

Resposta do problema:

As casas de Ana e Rosa estão unidas por 35 caminhos diferentes.

Permutações com repetição

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\underset{p_1}{\_\_\_} \quad \underset{p_2}{\_\_\_} \quad \underset{p_3}{\_\_\_} \quad \underset{p_4}{\_\_\_} \quad \underset{p_5}{\_\_\_} \quad \underset{p_6}{\_\_\_} \quad \underset{p_7}{\_\_\_} \quad \underset{p_8}{\_\_\_}$$

Permutações com repetição

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{A} & & & & & & & \\ \mathbf{E} & & & & & & & \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \end{array}$$

Permutações com repetição

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} \end{array}\right\} \text{etapa 1}$$

$$\underset{p_1}{\underline{\quad}} \quad \underset{p_2}{\underline{\quad}} \quad \underset{p_3}{\underline{\quad}} \quad \underset{p_4}{\underline{\quad}} \quad \underset{p_5}{\underline{\quad}} \quad \underset{p_6}{\underline{\quad}} \quad \underset{p_7}{\underline{\quad}} \quad \underset{p_8}{\underline{\quad}}$$

Permutações com repetição

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\left.\mathbf{A}\right\}\ \text{etapa 1}$$

$$\left.\frac{\mathbf{E}}{p_1}\ \frac{\quad}{p_2}\ \frac{\quad}{p_3}\ \frac{\quad}{p_4}\ \frac{\quad}{p_5}\ \frac{\quad}{p_6}\ \frac{\quad}{p_7}\ \frac{\quad}{p_8}\right\}\ \text{etapa 2}$$

Permutações com repetição

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\begin{array}{cccccccc|l}
\textbf{A} & & & & & & & & \} \text{ etapa 1} \\
\textbf{E} & & & & & & & & \} \text{ etapa 2} \\
\hline
p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 &
\end{array}$$

N: número de anagramas que começam com vogal

Permutações com repetição

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A}\end{array}\right\}\ \text{etapa 1}$$

$$\left.\begin{array}{cccccccc}\mathbf{E} & & & & & & & \\ \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{} & \overline{}\end{array}\right\}\ \text{etapa 2}$$

$$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad p_7 \quad p_8$$

N: número de anagramas que começam com vogal

N_1: número de anagramas que começam com A

Permutações com repetição

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{A} & & & & & & & \\ \mathbf{E} & & & & & & & \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & p_7 & p_8 \end{array} \begin{array}{l} \} \text{ etapa 1} \\ \} \text{ etapa 2} \\ \\ \\ \end{array}$$

N: número de anagramas que começam com vogal

N_1: número de anagramas que começam com A

N_2: número de anagramas que começam com E

Permutações com repetição

Exemplo 5:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que começam com vogal?

Resolução:

$$\left.\mathbf{A}\right\}\ \text{etapa 1}$$

$$\left.\underset{p_1}{\underline{\mathbf{E}}}\ \ \underset{p_2}{\underline{\quad}}\ \ \underset{p_3}{\underline{\quad}}\ \ \underset{p_4}{\underline{\quad}}\ \ \underset{p_5}{\underline{\quad}}\ \ \underset{p_6}{\underline{\quad}}\ \ \underset{p_7}{\underline{\quad}}\ \ \underset{p_8}{\underline{\quad}}\right\}\ \text{etapa 2}$$

N: número de anagramas que começam com vogal

N_1: número de anagramas que começam com A

N_2: número de anagramas que começam com E

$N = N_1 + N_2$

Permutações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

Etapa 1: (MAMBEMBE)

A ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

Permutações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

Etapa 1: (MAMBEMBE)

$$\underline{\mathbf{A}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 2 E}}$$

Permutações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

Etapa 1: (MAMBEMBE)

$$\underline{\mathbf{A}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 2 E}} \quad N_1 = P_7^{3,\,2,\,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

Permutações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

Etapa 1: (MAMBEMBE)

$$\underline{\mathbf{A}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 2 E}} \qquad N_1 = P_7^{3,\,2,\,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

Etapa 2:

$$\underline{\mathbf{E}}\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$$

Exemplo 5 (continuação):

Etapa 1: (MAMBEMBE)

$$\underline{\mathbf{A}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 2 E}} \qquad N_1 = P_7^{3,\,2,\,2} = \frac{7!}{3!\ 2!\ 2!}$$

Etapa 2:

$$\underline{\mathbf{E}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 1 E, 1 A}}$$

Permutações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

Etapa 1: (MAMBEMBE)

$$\underline{\mathbf{A}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 2 E}} \qquad N_1 = P_7^{3,\,2,\,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

Etapa 2:

$$\underline{\mathbf{E}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 1 E, 1 A}} \qquad N_2 = P_7^{3,\,2,\,1,\,1} = \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!}$$

Permutações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

Etapa 1: (MAMBEMBE)

$$\underline{\mathbf{A}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 2 E}} \quad N_1 = P_7^{3,\,2,\,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

Etapa 2:

$$\underline{\mathbf{E}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{\text{7 letras: 3 M, 2 B, 1 E, 1 A}} \quad N_2 = P_7^{3,\,2,\,1,\,1} = \frac{7!}{3!\,2!\,1!\,1!}$$

Resposta: O número de anagramas de MAMBEMBE que começam com vogal são $N = \frac{7!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 630$.

Exemplo 6:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que não possuem duas ou três letras M juntas?

Permutações com repetição

Exemplo 6:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que não possuem duas ou três letras M juntas?

- Ilustração:

MAMBEMBE, AMBMEMBE são possíveis anagramas

Permutações com repetição

Exemplo 6:

Quantos são os anagramas da palavra MAMBEMBE que não possuem duas ou três letras M juntas?

- Ilustração:

MAMBEMBE, AMBMEMBE são possíveis anagramas

AMMBEMBE, AMMMBEBE não são anagramas possíveis para o problema

Exemplo 6 (continuação):

Resolução:

N: número de anagramas que não possuem duas ou três letras M juntas.

Permutações com repetição

Exemplo 6 (continuação):

Resolução:

N: número de anagramas que não possuem duas ou três letras M juntas.

Etapa 1: Consideramos as letras de MAMBEMBE diferentes de M e calculamos o número de ordenamentos.

Permutações com repetição

Exemplo 6 (continuação):

Resolução:

N: número de anagramas que não possuem duas ou três letras M juntas.

Etapa 1: Consideramos as letras de MAMBEMBE diferentes de M e calculamos o número de ordenamentos.

- Observação: cada ordem das letras A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes) é 1 permutação com repetição:

Exemplo 6 (continuação):

Resolução:

N: número de anagramas que não possuem duas ou três letras M juntas.

Etapa 1: Consideramos as letras de MAMBEMBE diferentes de M e calculamos o número de ordenamentos.

- Observação: cada ordem das letras A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes) é 1 permutação com repetição:

$n_1 = 1 \ (a_1 = A)$, $n_2 = 2 \ (a_2 = B)$, $n_3 = 2 \ (a_3 = E)$, $n = 5$

Permutações com repetição

Exemplo 6 (continuação):

Resolução:

N: número de anagramas que não possuem duas ou três letras M juntas.

Etapa 1: Consideramos as letras de MAMBEMBE diferentes de M e calculamos o número de ordenamentos.

- Observação: cada ordem das letras A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes) é 1 permutação com repetição:

$n_1 = 1 \ (a_1 = A)$, $n_2 = 2 \ (a_2 = B)$, $n_3 = 2 \ (a_3 = E)$, $n = 5$

⇒ Conclusão 1: O número de ordens diferente de A, B, E, B e E é $P_5^{2,\,2,\,1}$

Permutações com repetição

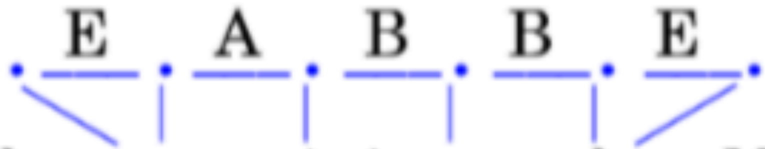
Exemplo 6 (continuação):

Etapa 2: Fixada uma permutação de A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes), calculamos as possibilidades de intercalar nessa permutação cada M(3).

Exemplo 6 (continuação):

Etapa 2: Fixada uma permutação de A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes), calculamos as possibilidades de intercalar nessa permutação cada M(3).

- Ilustração:



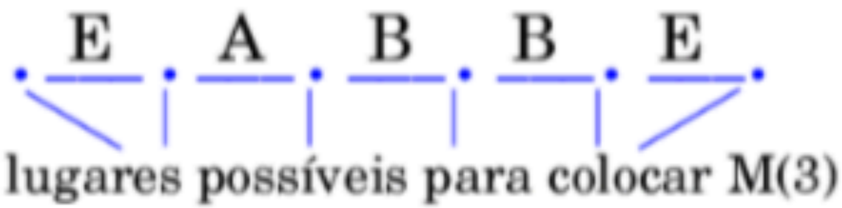
lugares possíveis para colocar M(3)

Permutações com repetição

Exemplo 6 (continuação):

Etapa 2: Fixada uma permutação de A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes), calculamos as possibilidades de intercalar nessa permutação cada M(3).

- Ilustração:



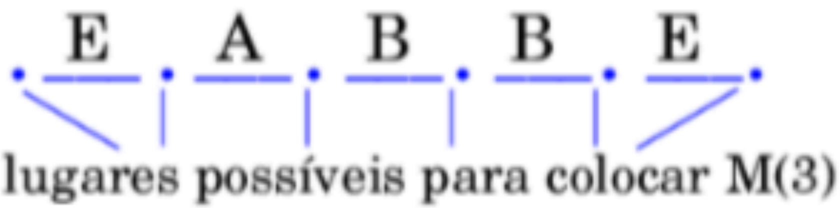
- Observações:
  - Para cada permutação com repetição temos 6 lugares possíveis para colocar a letra M.

Permutações com repetição

Exemplo 6 (continuação):

Etapa 2: Fixada uma permutação de A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes), calculamos as possibilidades de intercalar nessa permutação cada M(3).

- Ilustração:



- Observações:
  - Para cada permutação com repetição temos 6 lugares possíveis para colocar a letra M.
  - Devemos escolher 3 lugares entre 6 para colocar as 3 letras M

Permutações com repetição

Exemplo 6 (continuação):

Etapa 2: Fixada uma permutação de A (1 vez), B (2 vezes) e E (2 vezes), calculamos as possibilidades de intercalar nessa permutação cada M(3).

- Ilustração: . E . A . B . B . E .

  lugares possíveis para colocar M(3)

- Observações:
  - Para cada permutação com repetição temos 6 lugares possíveis para colocar a letra M.
  - Devemos escolher 3 lugares entre 6 para colocar as 3 letras M

- Conclusão 2: Fixada uma permutação de A(1), B(2) e E(2), temos C(6, 3) maneiras de colocar as letras M(3).

Exemplo 6 (continuação):

- Conclusão do problema:

$$1 \text{ permutação com repetição de A, B e E} \xrightarrow[\text{(etapa 2)}]{\text{gera}} C(6, 3) \text{ anagramas}$$

Permutações com repetição

Exemplo 6 (continuação):

- Conclusão do problema:

$$1 \text{ permutação com repetição de A, B e E} \xrightarrow[\textbf{(etapa 2)}]{\textbf{gera}} C(6, 3) \text{ anagramas}$$

$$\underset{\textbf{(etapa 1)}}{\text{total de permutações com repetição } P_5^{2,\,2,\,1}} \xrightarrow[\textbf{(P. M.)}]{\textbf{geram}} P_5^{2,\,2,\,1} \times C(6, 3) = N$$

$$\left(\frac{5!}{2!\;2!\;1!} \times \frac{6!}{3!\;3!} \right)$$

Exemplo 6 (continuação):

- Conclusão do problema:

1 permutação com repetição de A, B e E $\xrightarrow[\text{(etapa 2)}]{\text{gera}}$ C(6, 3) anagramas

total de permutações com repetição $P_5^{2,\,2,\,1}$ $\xrightarrow[\text{(P. M.)}]{\text{geram}}$ $P_5^{2,\,2,\,1} \times C(6,3) = N$

(etapa 1)

$$\left(\frac{5!}{2!\,2!\,1!} \times \frac{6!}{3!\,3!} \right)$$

Resposta:

O número de anagramas da palavra MAMBEMBE que não possuem duas ou três letras M juntas são 600.

Permutações com repetição

Desafio:

Tente resolver o exemplo 6 usando o seguinte raciocínio:

Etapa 1: Calcule o número de todos os anagramas de MAMBEMBE (incluindo aqueles em que aparecem 2 ou 3 letras M juntas), N_1.

Etapa 2: Calcule o número de anagramas onde aparecem exatamente duas M juntas, N_2.

(MMMABEBE não é um anagrama desta etapa)

Etapa 3: Calcule o número de anagramas onde aparecem exatamente três M juntas, N_3.

Conclusão:

$N = N_1 - N_2 - N_3$ (pelo princípio aditivo)